Allgemeine Lösungen der n-dimensionalen Laplace-Gleichung und ihre komplexe Variable

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao

Göttingen, den 24. Januar 2012

Abstract

General solutions of the n-dimensional Laplace equation and its complex variable

Each function of the complex variable $x+iy$ is a solution of the 2-dimensional Laplace equation. This theory will be extended to the n-dimensional Laplace equation.

Übersicht

Jede Funktion der komplexen Variablen $x+iy$ ist eine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung. Diese Theorie wird erweitert auf die n-dimensionale Laplace-Gleichung.

Internet

Dieser Artikel ist online abrufbar unter:
http://www.satzansatz.de/math/laplace.pdf

Anschrift des Verfassers

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao
Auf der Lehmbünde 23
37085 Göttingen
Germany
E-Mail: info@satzansatz.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegeben sei die komplexe Variable $x + iy$. Die Untersuchungen der Funktionen davon haben gezeigt, dass jede Funktion ϕ von $x + iy$ eine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung ist. Dies ist das bekannte Ergebnis aus den Gleichungen von Cauchy und Riemann [1, 2, 3]. Offenbar ist eine solche allgemeine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung eng mit dieser komplexen Variablen $x + iy$ verbunden.

In diesem Artikel betrachten wir Folgendes: Gegeben sei die Laplace-Gleichung mit zwei reellen Variablen x und y . Wir suchen dafür die allgemeinen Lösungen, d. h., jede Funktion von einer bestimmten Variablen soll eine Lösung sein. Unter dieser Voraussetzung wird eine Variable hergeleitet. Sie ist in der Tat nichts anderes als $x + iy$. Dies zeigen wir im Abschnitt 2 . Wir untersuchen im Abschnitt 3 die allgemeinen Lösungen für die 3-dimensionale Laplace-Gleichung und bekommen eine ganz neue komplexe Variable mit drei reellen Variablen x , y und z . Im Abschnitt 4 untersuchen wir den Fall der n-dimensionalen Laplace-Gleichung und leiten ihre komplexe Variable her.

2 Allgemeine Lösungen der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung und ihre komplexe Variable

Die Laplace-Gleichung mit zwei reellen Variablen x und y lautet

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad . \tag{2.1}$$

Wie üblich bedeuten ϕ_{xx} und ϕ_{yy} die zweimaligen partiellen Ableitungen von ϕ nach x und y . Die Lösungsfunktion ϕ ist eine Funktion von x und y , d. h. von zwei Variablen. Wir suchen aber hier eine solche Lösung von (2.1), die formell nur von einer Variablen Z abhängig ist:

$$\phi = \phi(Z) \quad . \tag{2.2}$$

Dabei ist Z eine Funktion von x und y :

$$Z = Z(x, y) \quad . \tag{2.3}$$

Wir differenzieren (2.2) nach x :

$$\phi_x = \phi' Z_x \quad , \tag{2.4}$$

$$\phi_{xx} = \phi'' Z_x^2 + \phi' Z_{xx} \quad . \tag{2.5}$$

ϕ' und ϕ'' sind die gewöhnlichen Ableitungen von ϕ nach der neuen Variablen Z .

Genau so differenzieren wir (2.2) nach y :

$$\phi_y = \phi' Z_y \quad , \tag{2.6}$$

$$\phi_{yy} = \phi'' Z_y^2 + \phi' Z_{yy} \quad . \tag{2.7}$$

Nach Einsetzen von (2.5) und (2.7) in die Laplace-Gleichung (2.1) erhalten wir

$$\phi'(Z_{xx} + Z_{yy}) + \phi''(Z_x^2 + Z_y^2) = 0 \quad . \tag{2.8}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn Z sowohl

$$Z_{xx} + Z_{yy} = 0 \tag{2.9}$$

als auch

$$Z_x^2 + Z_y^2 = 0 \tag{2.10}$$

gleichzeitig befriedigen kann. (2.9) zeigt, dass Z selber eine Lösung der Laplace-Gleichung sein muss. Außerdem muss Z noch (2.10) erfüllen. Wenn eine Funktion zwei partielle Differentialgleichungen erfüllen soll, kann sie nur eine einfachste Gestalt haben. Offenbar erfüllt eine lineare Funktion

$$Z = ax + by \tag{2.11}$$

mit den Konstanten a und b die Gleichung (2.9). (2.10) wird dadurch

$$a^2 + b^2 = 0 \tag{2.12}$$

mit den Lösungen

$$a^2 = 1 \quad , \tag{2.13}$$
$$b^2 = -1 \quad . \tag{2.14}$$

Daraus folgt mit $i = \sqrt{-1}$

$$a = 1 \quad , \tag{2.15}$$
$$b = i \quad . \tag{2.16}$$

Die gesuchte neue Variable Z ist folglich

$$Z = x + iy \quad , \tag{2.17}$$

die bekannte komplexe Variable.

Es gilt auch $a = 1$ und $b = -i$:

$$Z = x - iy \quad . \tag{2.18}$$

In diesem Artikel bezeichnen wir die komplexe Variable mit dem großen Buchstaben Z. Der kleine Buchstabe z wird im nächsten Abschnitt als die dritte Koordinate außer x und y bezeichnet.

X und Y sind der Realteil bzw. der Imaginärteil von Z :

$$Z = X + iY \quad . \tag{2.19}$$

Im 2-dimensionalen Fall nach (2.17) haben wir

$$X = x \quad , \tag{2.20}$$
$$Y = y \quad . \tag{2.21}$$

Nach (2.2) ist jede Funktion $\phi(Z) = \phi(x + iy)$ eine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung. Wir trennen den Real- und Imaginärteil von ϕ :

$$\phi = U(x,y) + iV(x,y) \quad , \tag{2.22}$$

und setzen sie in die Gleichung (2.1) ein:

$$U_{xx} + U_{yy} + i\left[V_{xx} + V_{yy}\right] = 0 \quad . \tag{2.23}$$

Eine komplexe Größe kann nur gleich Null sein, wenn der Realteil und der Imaginärteil gleichzeitig gleich Null sind:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad , \tag{2.24}$$

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \quad . \tag{2.25}$$

U und V sind daher Lösungen der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung. Als Beispiel nehmen wir

$$\begin{aligned} \phi(Z) &= (X + iY)^2 \\ &= X^2 - Y^2 + i2XY \end{aligned} \tag{2.26}$$

mit

$$U = X^2 - Y^2 = x^2 - y^2 \quad , \tag{2.27}$$

$$V = 2XY = 2xy \quad . \tag{2.28}$$

3 Allgemeine Lösungen der 3-dimensionalen Laplace-Gleichung und ihre komplexe Variable

Für die Laplace-Gleichung

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{3.1}$$

mit drei reellen Variablen x , y und z suchen wir solche Lösungen, die nur von einer einzigen Variable Z abhängig sind:

$$\phi = \phi(Z) \quad . \tag{3.2}$$

Z ist eine Funktion von x , y und z :

$$Z = Z(x, y, z) \quad . \tag{3.3}$$

Wir differenzieren (3.2) nach x , y und z und setzen die Ableitungen in (3.1) ein und erhalten

$$\phi'(Z_{xx} + Z_{yy} + Z_{zz}) + \phi''(Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2) = 0 \quad . \tag{3.4}$$

$\phi(Z)$ ist nur dann eine Lösung, wenn Z

$$Z_{xx} + Z_{yy} + Z_{zz} = 0 \tag{3.5}$$

und

$$Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2 = 0 \tag{3.6}$$

gleichzeitig erfüllen kann. Eine lineare Funktion

$$Z = ax + by + cz \tag{3.7}$$

mit drei Konstanten a , b und c erfüllt (3.5) automatisch. Die zweite Bedingung (3.6) wird

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad . \tag{3.8}$$

Aus der Beziehung zwischen Wurzeln und Koeffizienten von einer algebraischen Gleichung wissen wir, dass die drei Wurzeln von $\sqrt[3]{1}$ die Bedingung (3.8) erfüllen. Mit Hilfe der Formel von De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\theta + 2(\kappa - 1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2(\kappa - 1)\pi}{n} \tag{3.9}$$

mit $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ erhalten wir bei Anfangswinkel $\theta = 0$ und $n = 3$:

$$a^2 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \quad , \tag{3.10}$$

$$b^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \tag{3.11}$$

$$c^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad . \tag{3.12}$$

Nochmal ziehen wir die Quadratwurzeln:

$$a = 1 \quad , \tag{3.13}$$

$$b = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \tag{3.14}$$

$$c = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad . \tag{3.15}$$

Die gesuchte Z lautet daher

$$Z = X + iY \tag{3.16}$$

mit

$$X = x + \frac{1}{2}(y - z) \quad , \tag{3.17}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z) \quad . \tag{3.18}$$

Da x , y und z gleichwertig sind, sind sie miteinander vertauschbar, z. B. gelten auch

$$X = z + \frac{1}{2}(x - y) \quad , \tag{3.19}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y) \quad . \tag{3.20}$$

Jede Funktion von $\phi(X + iY)$ ist eine Lösung der 3-dimensionalen Laplace-Gleichung, wobei X und Y aus (3.17) und (3.18) oder aus (3.19) und (3.20) sind.

Der Realteil U und der Imaginärteil V von ϕ erfüllen für sich die Laplace-Gleichung:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \tag{3.21}$$

und

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \quad . \tag{3.22}$$

Es ist mit (3.17) und (3.18) leicht zu bestätigen, dass folgende Beziehung richtig ist:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = \frac{3}{2}(\phi_{XX} + \phi_{YY}) \quad . \tag{3.23}$$

Jede Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung wird zu einer Lösung der 3-dimensionalen Laplace-Gleichung durch Einsetzen von (3.17) und (3.18). Ein Beispiel aus (2.27) und (2.28):

$$\begin{aligned} U &= X^2 - Y^2 \\ &= \left[x + \frac{1}{2}(y-z)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)\right]^2 \quad , \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} V &= 2XY \\ &= 2\left[x + \frac{1}{2}(y-z)\right]\frac{\sqrt{3}}{2}(y+z) \quad . \end{aligned} \tag{3.25}$$

4 Allgemeine Lösungen der n-dimensionalen Laplace-Gleichung und ihre komplexe Variable

In diesem Abschnitt wollen wir die n unabhängigen reellen Variablen mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen. Die Laplace-Gleichung ist

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{x_k x_k} = 0 \quad . \tag{4.1}$$

Wir suchen jetzt solche Lösungen, die formell nur von einer einzigen Variablen Z abhängig sind:

$$\phi = \phi(Z) \quad . \tag{4.2}$$

Z ist aber eine Funktion von den n Variablen:

$$Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad . \tag{4.3}$$

Wir setzen die zweimaligen Ableitungen von (4.2) in die Gleichung (4.1) ein und erhalten

$$\phi' \sum_{k=1}^{n} Z_{x_k x_k} + \phi'' \sum_{k=1}^{n} Z_{x_k}^2 = 0 \quad . \tag{4.4}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn Z folgende Voraussetzungen befriedigen kann:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{x_k x_k} = 0 \tag{4.5}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{x_k}^2 = 0 \quad . \tag{4.6}$$

Eine lineare Funktion

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{4.7}$$

mit n Konstanten $a_1, a_2, \dots, a_n$ erfüllt (4.5). Dadurch wird (4.6)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0 \quad . \tag{4.8}$$

Die Berechnung von a_k bleibt gleich wie im Abschnitt 3. Für $k = 1$ bis n wird

$$a_k = \cos\frac{(k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(k-1)\pi}{n} \quad . \tag{4.9}$$

Wir erhalten

$$Z = X + iY \tag{4.10}$$

mit

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \cos\frac{(k-1)\pi}{n} \quad , \tag{4.11}$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} x_k \sin\frac{(k-1)\pi}{n} \quad . \tag{4.12}$$

Es gilt außerdem

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{x_k x_k} = \frac{n}{2}\left[\phi_{XX} + \phi_{YY}\right] \quad . \tag{4.13}$$

Dabei haben wir die folgenden Beziehungen benutzt:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{(k-1)\pi}{n} = \frac{n}{2} \quad , \tag{4.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{(k-1)\pi}{n} = \frac{n}{2} \quad . \tag{4.15}$$

Man kann dies mit der Methode der Induktion oder mit Hilfe eines Taschenrechners bestätigen. Dieser kleine Beitrag zur Trigonometrie liefert uns bei $n = 5$ das ungewöhnliche Ergebnis $\cos 36°$ in (4.22).

Jede Funktion ϕ von Z aus (4.10), (4.11) und (4.12) ist eine Lösung der n-dimensionalen Laplace-Gleichung. Der Realteil und der Imaginärteil von $\phi = U + iV$ erfüllen für sich die n-dimensionale Laplace-Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} U_{x_k x_k} = 0 \quad , \tag{4.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} V_{x_k x_k} = 0 \quad . \tag{4.17}$$

Wir haben schon die Lösungen für die 2- und 3-dimensionalen Fälle in (2.17), (3.17) und (3.18) gezeigt. Weiter zeigen wir nur noch die Ergebnisse für $n = 4, 5$ und 6.

$n = 4$:

$$X = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - x_4) \quad , \tag{4.18}$$

$$Y = x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + x_4) \quad . \tag{4.19}$$

$n = 5$:

$$X = x_1 + c_1(x_2 - x_5) + c_2(x_3 - x_4) \quad , \tag{4.20}$$

$$Y = s_1(x_2 + x_5) + s_2(x_3 + x_4) \quad . \tag{4.21}$$

mit 4 Konstanten:

$$c_1 = \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad , \tag{4.22}$$

$$c_2 = \cos 72^\circ = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad , \tag{4.23}$$

$$s_1 = \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad , \tag{4.24}$$

$$s_2 = \sin 72^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad . \tag{4.25}$$

$n = 6$:

$$X = x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_6) + \frac{1}{2}(x_3 - x_5) \quad , \tag{4.26}$$

$$Y = x_4 + \frac{1}{2}(x_2 + x_6) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_3 + x_5) \quad . \tag{4.27}$$

Als Beispiel betrachten wir

$$\sin(X + iY) = \sin X \cosh Y + i \cos X \sinh Y \tag{4.28}$$

und erhalten die Lösungen für die 4-dimensionale Laplace-Gleichung:

$$U = \sin\left[x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - x_4)\right] \cosh\left[x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + x_4)\right] \quad , \tag{4.29}$$

$$V = \cos\left[x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - x_4)\right] \sinh\left[x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + x_4)\right] \quad . \tag{4.30}$$

5 Zusammenfassung

Jede Funktion der komplexen Variablen $x + iy$ ist eine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung. Dies ist bekannt aus der Theorie der komplexen Funktionen. Im n-dimensionalen Raum existiert auch eine spezielle komplexe Variable. Jede Funktion dieser n-dimensionalen komplexen Variablen ist eine Lösung der n-dimensionalen Laplace-Gleichung.

Literatur

[1] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig
Taschenbuch der Mathematik, 5. Auflage
Verlag Harry Deutsch 2001

[2] Frederick S. Woods
Advanced Calculus
Ginn and Company, Boston 1926

[3] Arnold Sommerfeld
Partial Differential Equations in Physics
Acadmic Press, New York 1949