Integral-Iterationsverfahren und die exakten Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao

Göttingen, den 16. Juni 2007

Abstract

The integral iterative method and exact solutions of partial differential equations

An integral iterative method will be introduced in order to derive exact solutions of partial differential equations in two variables. This method first achieved success when used with nonlinear partial differential equations for transonic flow. In this article, the method has been applied to four different linear partial differential equations: the Laplace equation, the Poisson equation, the biharmonic equation and the biharmonic Poisson equation.

Harmonic functions, which are known from the theory of complex numbers, have been rediscovered. In addition, by using this integral iterative method, infinite biharmonic functions have been found. For both the Poisson equation and the biharmonic Poisson equation, many specific solutions are presented in detail.

Übersicht

Ein Integral-Iterationsverfahren wird vorgestellt, um exakte Lösungen der partiellen Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen herzuleiten. Dieses Verfahren hatte zuerst bei den nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die transsonische Strömung Erfolg erzielt. In diesem Artikel wird dieses Verfahren auf vier verschiedene lineare partielle Differentialgleichungen angewendet: die Laplace-Gleichung, die Poisson-Gleichung, die biharmonische Gleichung sowie die biharmonische Poisson-Gleichung.

Die harmonischen Funktionen, wie sie aus der Theorie der komplexen Zahlen bekannt sind, werden von Neuem entdeckt. Darüber hinaus konnten

mit diesem Integral-Iterationsverfahren unendlich viele biharmonische Funktionen gefunden werden. Für die Poisson-Gleichung und die biharmonische Poisson-Gleichung werden viele partikuläre Lösungen bei gegebener Rechtsseite ausführlich dargestellt.

Internet

Dieser Artikel ist online abrufbar unter:
http://www.satzansatz.de/math/integraliteration.pdf

Anschrift des Verfassers

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao
Auf der Lehmbünde 23
37085 Göttingen
Germany
E-Mail: info@satzansatz.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Jahr 1986 hatte der Verfasser dieses Artikels ein Integral-Iterationsverfahren erstmalig vorgestellt, um Lösungen für die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die transsonische Strömung herzuleiten [1]. Für die Gleichung

$$\phi_x \phi_{xx} = \phi_{yy} \tag{1.1}$$

wurden einige exakte Lösungen gefunden, z. B.

$$\phi = ax^2 y + \frac{a^2}{3} x y^4 + \frac{a^3}{63} y^7 \tag{1.2}$$

und

$$\phi = a x^{\frac{3}{2}} y + \frac{3}{32} a^2 y^4 \; . \tag{1.3}$$

Dabei ist a Konstante. ϕ ist das Potential. $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ und $\phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ sind die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten x und y.

Wir wollen jetzt dieses Integral-Iterationsverfahren auch auf die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{1.4}$$

und die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = \rho \tag{1.5}$$

bei gegebener Funktion $\rho(x, y)$ anwenden. Mit diesem Iterationsverfahren wollen wir auch exakte Lösungen der biharmonischen Gleichung [2]

$$\Delta \Delta \phi = 0 \tag{1.6}$$

sowie der biharmonischen Poisson-Gleichung

$$\Delta \Delta \phi = \rho \tag{1.7}$$

herleiten.

Im Abschnitt 2 möchten wir dieses Verfahren anhand der Laplace-Gleichung erklären.

2 Integral-Iterationsverfahren und die harmonischen Funktionen

Aus der Theorie der komplexen Zahlen wissen wir, dass jede analytische Funktion von $x + iy$ mit $i = \sqrt{-1}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \ . \tag{2.1}$$

Wegen der Cauchy-Riemannschen Beziehungen

$$u_x = v_y \ , \tag{2.2}$$

$$u_y = -v_x \ , \tag{2.3}$$

sind sowohl der Realteil u als auch der Imaginärteil v Lösungen der Laplace-Gleichung. Einige Beispiele:

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \ , \tag{2.4}$$

$$(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \ , \tag{2.5}$$

$$(x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) \ . \tag{2.6}$$

Unser Integral-Iterationsverfahren liefert uns die gleichen Ergebnisse. Dazu führen wir eine neue Bezeichnung ein:

$$L = \phi_{xx} + \phi_{yy} \ . \tag{2.7}$$

Das Prinzip ist folgendes: Wir machen mehrere Ansätze $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots \phi_n$ und prüfen dabei stets $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$. Wenn $L_n = 0$ ist, dann ist ϕ_n die Lösung. Die Prozedur läuft folgendermaßen: Wir machen zunächst einen Ansatz ϕ_1 mit irgendeinem mathematischen Ausdruck von x und y und berechnen $L_1 = \phi_{1xx} + \phi_{1yy}$. Wenn $L_1 = 0$ ist, so ist ϕ_1 eine Lösung. Wenn $L_1 \neq 0$ ist, machen wir einen zweiten Ansatz ϕ_2 :

$$\phi_2 = \phi_1 - \iint L_1 \, dy \, dy \ . \tag{2.8}$$

Das heißt, wir ziehen ein Glied von ϕ_1 ab. Dieses Glied besteht aus der zweimaligen Integration von L_1 nach y .

Wir berechnen $L_2 = \phi_{2xx} + \phi_{2yy}$. Wenn $L_2 = 0$ ist, dann ist ϕ_2 eine Lösung. Wenn $L_2 \neq 0$ ist, machen wir wieder einen Ansatz mit

$$\phi_3 = \phi_2 - \iint L_2 \, dy \, dy \tag{2.9}$$

und berechnen weiter L_3 usw., bis wir eine Lösung gefunden haben.

Als Beispiel setzen wir $\phi_1 = x^3$ ein:

$$\phi_{1x} = 3x^2 \ , \quad \phi_{1xx} = 6x \ , \quad \phi_{1y} = 0 \ , \quad \phi_{1yy} = 0 \ , \quad L_1 = 6x \ ;$$
$$\iint L_1 \, dy \, dy = \iint 6x \, dy \, dy = 3xy^2 \ ,$$
$$\phi_2 = \phi_1 - \iint L_1 \, dy \, dy = x^3 - 3xy^2 \ .$$

Wir berechnen weiter:

$$\phi_{2x} = 3x^2 - 3y^2 \ , \quad \phi_{2xx} = 6x \ , \quad \phi_{2y} = -6xy \ , \quad \phi_{2yy} = -6x \ ,$$
$$L_2 = \phi_{2xx} + \phi_{2yy} = 6x - 6x = 0 \ .$$

Daher ist $\phi = \phi_2 = x^3 - 3xy^2$ eine Lösung. Sie ist der Realteil von $(x+iy)^3$ aus (2.5).

Bei einem Ansatz $\phi_1 = x^m$, wobei m eine positive ganze Zahl ist, erhalten wir

$$\phi = \binom{m}{0} x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \binom{m}{4} x^{m-4} y^4 - \binom{m}{6} x^{m-6} y^6 + \cdots \tag{2.10}$$

wobei

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \tag{2.11}$$

die Binominalkoeffizienten sind.

Wenn wir den Ansatz $\phi_1 = mx^{m-1}y$ einsetzen, erhalten wir die Lösung der Laplace-Gleichung in folgender Form:

$$\phi = \binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 + \binom{m}{5} x^{m-5} y^5 - \binom{m}{7} x^{m-7} y^7 + \cdots \tag{2.12}$$

Die Lösungen (2.10) und (2.12) sind nichts anderes als der Realteil bzw. der Imaginärteil von $(x+iy)^m$.

Aber wir haben während der ganzen Durchführung des Iterationsverfahrens von den komplexen Zahlen gar keinen Gebrauch gemacht.

Beim Integrieren haben wir immer die willkürliche Funktion oder Konstante gleich Null gesetzt.

Wenn der erste Ansatz $\phi_1 = y^m$ oder $\phi_1 = my^{m-1}x$ ist, muss man nach x integrieren:

$$\phi_2 = \phi_1 - \iint L_1 \, dx \, dx \tag{2.13}$$

und

$$\phi_3 = \phi_2 - \iint L_2 \, dx \, dx \ . \tag{2.14}$$

Die Ergebnisse sind wie (2.10) und (2.12) durch Vertauschen von x und y .

Alle anderen Ansätze ϕ_1 mit algebraischen Ausdrücken führen zu unendlichen Reihen oder Null (Null-Lösung).

Aus der Methode der Separation der Veränderlichen erhält man die Lösungen der Laplace-Gleichung $e^x \cos y$ und $e^x \sin y$. Mithilfe des Integral-Iterationsverfahrens kann man die Reihen-Entwicklung der Funktionen wiederfinden. Wenn wir zum Beispiel $\phi_1 = e^x$ und $\phi_1 = e^x y$ einsetzen, erhalten wir die Reihen-Entwicklung von $\cos y$ und $\sin y$. Wenn wir $\phi_1 = \cos x$ und $\phi_1 = (\sin x)y$ einsetzen, erhalten wir die Reihen-Entwicklung von Hyperbelfunktionen $\cosh y$ und $\sinh y$, weil $\cos x \cdot \cosh y$ und $\sin x \cdot \sinh y$ zwei harmonische Funktionen sind.

Alle Ergebnisse sind bekannt und zeigen nur die Richtigkeit des beschriebenen Integral-Iterationsverfahrens. Damit versuchen wir, Lösungen auch von anderen Differentialgleichungen zu finden, zum Beispiel von der Poisson-Gleichung.

3 Integral-Iterationsverfahren und die Lösungen der Poisson-Gleichung

Für die Poisson-Gleichung

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \rho \tag{3.1}$$

führen wir eine neue Bezeichnung ein:

$$P = \phi_{xx} + \phi_{yy} - \rho \ . \tag{3.2}$$

Bei einer gegebenen Funktion $\rho = \rho(x, y)$ wollen wir eine Lösung mit folgendem Integral-Iterationsverfahren finden: Wir machen den ersten Ansatz ϕ_1 und berechnen $P_1 = \phi_{1xx} + \phi_{1yy} - \rho$. Wenn $P_1 = 0$ ist, so ist ϕ_1 eine Lösung. Wenn $P_1 \neq 0$ ist, machen wir einen zweiten Ansatz mit

$$\phi_2 = \phi_1 - \iint P_1 \, dy \, dy \tag{3.3}$$

und berechnen $P_2 = \phi_{2xx} + \phi_{2yy} - \rho$. Wenn $P_2 = 0$ ist, so ist ϕ_2 eine Lösung. Wenn $P_2 \neq 0$ ist, machen wir wieder einen Ansatz

$$\phi_3 = \phi_2 - \iint P_2 \, dy \, dy \tag{3.4}$$

und berechnen P_3 usw.

Wenn wir $\phi_1 \neq 0$ einsetzen, erhalten wir eine harmonische Funktion plus eine partikuläre Lösung für ρ . Daher machen wir den ersten Ansatz $\phi_1 = 0$ und erhalten

$$\phi_2 = \iint \rho \, dy \, dy \ , \tag{3.5}$$

um direkt zu der partikulären Lösung zu gelangen.

Als Beispiel nehmen wir an

$$\rho = xy \ , \tag{3.6}$$

dann

$$\phi_2 = \iint xy \, dy \, dy = \frac{1}{6} x y^3 \ . \tag{3.7}$$

Wir berechnen

$$\phi_{2x} = \frac{1}{6} y^3 \ , \quad \phi_{2xx} = 0 \ , \quad \phi_{2y} = \frac{1}{2} x y^2 \ , \quad \phi_{2yy} = xy$$

und

$$P_2 = \phi_{2xx} + \phi_{2yy} - \rho = 0 + xy - xy = 0 \ .$$

(3.7) ist die gesuchte Lösung.

An dieser Stelle wollen wir eine neue Bezeichnung einführen, um die Formel zu vereinfachen:

$$(m,n) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\ . \tag{3.8}$$

Es gilt $(m,1) = m$, $(m,0) = 1$, $(n,n) = n!$ und $(m,n) = 0$, wenn $n > m$ und m natürliche Zahl ist. Der Zähler des Binominalkoeffizienten (2.11) ist (m,n) .

Nach dieser Vorbereitung versuchen wir, eine allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung mit

$$\rho = x^m y^n \tag{3.9}$$

herauszufinden. Bei Anwendung des Integral-Iterationsverfahrens führen wir in der Tat nur einige Schritte durch, dann zeigt die Lösungsfunktion ihren Verlauf: Der Exponent von x ist um 2 abnehmend und der Exponent von y ist um 2 zunehmend. Das erste Glied ist aber $x^m y^{n+2}$. Wir machen einen neuen Ansatz

$$\phi = a_0 x^m y^{n+2} + a_2 x^{m-2} y^{n+4} + a_4 x^{m-4} y^{n+6} + \cdots \tag{3.10}$$

und setzen ϕ in die Poisson-Gleichung (3.1) ein und bestimmen die Koeffizienten a_0 , a_2 , $a_4 \ldots$ Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} \phi_A = {} & \frac{(m,0)}{(n+2,2)} x^m y^{n+2} - \frac{(m,2)}{(n+4,4)} x^{m-2} y^{n+4} + \\ & + \frac{(m,4)}{(n+6,6)} x^{m-4} y^{n+6} - \frac{(m,6)}{(n+8,8)} x^{m-6} y^{n+8} + \cdots\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wenn wir $\phi_1 = 0$ und

$$\phi_2 = \iint \rho\, dx\, dx \tag{3.12}$$

ansetzen und ρ zweimal nach x integrieren,

$$\phi_3 = \phi_2 - \iint P_2\, dx\, dx\ , \tag{3.13}$$

dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi_B = {} & \frac{(n,0)}{(m+2,2)} x^{m+2} y^n - \frac{(n,2)}{(m+4,4)} x^{m+4} y^{n-2} + \\ & + \frac{(n,4)}{(m+6,6)} x^{m+6} y^{n-4} - \frac{(n,6)}{(m+8,8)} x^{m+8} y^{n-6} + \cdots\ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Gegeben sei $\rho = x^2 y^3$ mit $m = 2$ und $n = 3$, dann lautet die Lösung aus (3.11)

$$\phi_A = \frac{1}{20} x^2 y^5 - \frac{1}{420} y^7 \; . \tag{3.15}$$

Die Lösung aus (3.14) ist aber

$$\phi_B = \frac{1}{12} x^4 y^3 - \frac{1}{60} x^6 y \; . \tag{3.16}$$

In der Tat sind die beiden Lösungen nicht unabhängig, in dem Sinne, dass die Differenz der beiden, $\phi_A - \phi_B$, eine harmonische Funktion ist. In unserem Beispiel handelt es sich um eine Zahl 420 mal den Imaginärteil von $(x+iy)^7$.

Bei (3.11) soll m eine positive ganze Zahl sein, damit die Lösung ϕ_A endlich viele Glieder hat. Aber n darf auch eine Bruchzahl sein, auch eine negative Bruchzahl:

$$\rho = x^2 y^{\frac{1}{3}} \; : \qquad \phi_A = \frac{9}{28} x^2 y^{\frac{7}{3}} - \frac{81}{1820} y^{\frac{13}{3}} \tag{3.17}$$

und

$$\rho = x^3 y^{-\frac{1}{2}} \; : \qquad \phi_A = \frac{4}{3} x^3 y^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{35} y^{\frac{7}{2}} \; . \tag{3.18}$$

Wir wollen später den Fall betrachten, in dem der Exponent von y eine negative ganze Zahl ist.

Als weiteres Lösungsbeispiel der Poisson-Gleichung zeigen wir folgenden Fall: $\rho = x^m \ln y$ mit der Logarithmusfunktion $\ln y$. Die Gleichung (3.5) wird

$$\phi_2 = \iint \rho \, dy \, dy = x^m \iint \ln y \, dy \, dy \; . \tag{3.19}$$

Wir führen vereinfachende Bezeichnungen ein, um die mehrfachen Integrationen von $\ln y$ darzustellen. Dazu benutzen wir den Großbuchstaben S mit einem Exponenten.

$$\begin{aligned} S^0 &= \ln y \; , \\ S^1 &= \int \ln y \, dy = \frac{y}{1!}(\ln y - 1) \; , \\ S^2 &= \iint \ln y \, dy \, dy = \frac{y^2}{2!}(\ln y - 1 - \frac{1}{2}) \; , \\ &\vdots \\ S^n &= \frac{y^n}{n!}(\ln y - N_n) \; , \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\text{wobei} \quad N_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{3.21}$$

die Summe von n Gliedern der harmonischen Reihe ist.

Die Lösung der Poisson-Gleichung mit $\rho = x^m \ln y$ lautet

$$\phi_C = x^m S^2 - (m,2)x^{m-2}S^4 + (m,4)x^{m-4}S^6 - \cdots \tag{3.22}$$

Ein Beispiel für $\rho = x^3 \ln y$:

$$\phi_C = \frac{1}{2}x^3y^2(\ln y - \frac{3}{2}) - \frac{1}{4}xy^4(\ln y - \frac{25}{12}) \ . \tag{3.23}$$

Wir wenden uns dem Fall von $\rho = x^m y^{-n}$ zu. Je nachdem, ob n ungerade oder gerade ist, müssen wir zwei Fälle getrennt betrachten:

- Wenn n ungerade ist, schreiben wir die Lösungsfunktionen für $n = 1$ und $n \geq 3$ getrennt auf, sonst ist die Formel zu unübersichtlich.

  Für $n = 1$:

$$\phi_D = x^m S^1 - (m,2)x^{m-2}S^3 + (m,4)x^{m-4}S^5 - (m,6)x^{m-6}S^7 + \cdots \tag{3.24}$$

  Für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}\phi_E = &\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k \frac{(m,2k)}{(n-1,2k+2)} x^{m-2k} y^{-n+2k+2} + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!} \sum_{k=0} (-1)^k (m, n+2k-1) x^{m-n-2k+1} S^{2k+1} \ .\end{aligned} \tag{3.25}$$

- Wenn n gerade ist, schreiben wir die Lösungen für $n = 2$ und $n \geq 4$ auch getrennt auf.

  Für $n = 2$:

$$\phi_F = -\left[x^m S^0 - (m,2)x^{m-2}S^2 + (m,4)x^{m-4}S^4 - \cdots\right] \tag{3.26}$$

  Für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}\phi_G = &\sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} (-1)^k \frac{(m,2k)}{(n-1,2k+2)} x^{m-2k} y^{-n+2k+2} + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{n-4}{2}}}{(n-1)!} \sum_{k=0} (-1)^k (m, n+2k-2) x^{m-n-2k+2} S^{2k} \ .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Formeln (3.25) und (3.27) haben jeweils zwei Summen. Wir haben die obere Summationsgrenze der zweiten Summe offengelassen, das bedeutet, dass man das Summieren so lange durchführen soll, bis der Koeffizient $(m, \ldots) = 0$ wird.

Noch eine Bemerkung: In (3.25) ist das Vorzeichen der Glieder durchgehend $+$ und $-$ abwechselnd angeordnet. Aber (3.27) hat eine Unterbrechung in der Abfolge der Vorzeichen: Das letzte Glied der ersten Summe und das erste Glied der zweiten Summe haben das gleiche Vorzeichen.

Drei Beispiele haben wir ausgewählt:

$$\rho = x^2 y^{-5} \ : \phi_E = \frac{1}{12} x^2 y^{-3} - \frac{1}{12} y^{-1} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \rho = x^9 y^{-5} \ : \phi_F &= \frac{1}{(4,2)} x^9 y^{-3} - \frac{(9,2)}{(4,4)} x^7 y^{-1} + \\ &+ \frac{1}{4!}\left[(9,4)x^5 S^1 - (9,6)x^3 S^3 + (9,8)x S^5\right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} \rho = x^8 y^{-6} \ : \phi_G &= \frac{1}{(5,2)} x^8 y^{-4} - \frac{(8,2)}{(5,4)} x^6 y^{-2} - \\ &- \frac{1}{5!}\left[(8,4)x^4 \ln y - (8,6)x^2 S^2 + (8,8) S^4\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Das Ausrechnen von (m, n) nach (3.8) und das Einsetzen von S^n nach (3.20) machen wir ab jetzt nicht mehr.

Ein Hinweis als Abschluss dieses Abschnitts: Falls ρ elementare Funktionen wie e^x , $\cos x$ oder $\sinh x$ enthält, machen wir zunächst eine Transformation, um sie wegzubringen, und lösen die entstandene gewöhnliche Differentialgleichung. Die Lösungsmethode ist bekannt [3].

4 Integral-Iterationsverfahren und die biharmonischen Funktionen

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\phi_{xxxx} + 2\phi_{xxyy} + \phi_{yyyy} = 0 \tag{4.1}$$

wird als biharmonische Funktion benannt. Wir haben eine solche Funktion gefunden

$$\phi = x^5 - 5xy^4 \ . \tag{4.2}$$

Wir prüfen:

$$\begin{aligned} \phi_x &= 5x^4 - 5y^4 \ , & \phi_y &= -5 \cdot 4xy^3 \ , \\ \phi_{xx} &= 5 \cdot 4x^3 \ , & \phi_{yy} &= -5 \cdot 4 \cdot 3xy^2 \ , \\ \phi_{xxx} &= 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 \ , & \phi_{yyy} &= -5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2xy \ , \\ \phi_{xxxx} &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x \ , & \phi_{yyyy} &= -5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x \ , \\ \phi_{xxyy} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Daher erfüllt ϕ die Gleichung (4.1) und

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} \neq 0 \ .$$

Die Funktion ϕ in (4.2) ist keine harmonische Funktion, sondern eine richtige biharmonische Funktion.

Jede harmonische Funktion, also die Lösung der Laplace-Gleichung, erfüllt auch (4.1). Aber wir wollen solche triviale Lösungen ausschließen.

In der Tat haben wir die biharmonische Funktion (4.2) mit Hilfe des Integral-Iterationsverfahrens hergeleitet. Die Formulierung dieses Verfahrens ist dieselbe wie bei der Laplace-Gleichung. Nur ist der Integrand jetzt

$$B = \phi_{xxxx} + 2\phi_{xxyy} + \phi_{yyyy} \tag{4.3}$$

und wir integrieren nicht mehr zweimal, sondern viermal nach y :

$$\phi_2 = \phi_1 - \iiiint B_1 \, dy \, dy \, dy \, dy \tag{4.4}$$

und

$$\phi_3 = \phi_2 - \iiiint B_2 \, dy \, dy \, dy \, dy \ . \tag{4.5}$$

Für den ersten Ansatz ϕ_1 mit einem algebraischen Ausdruck gibt es vier Typen von Lösungen, wo der Exponent von y gleich 0, 1, 2 und 3 ist.

Um die Formel zu vereinfachen, haben wir das erste Glied mit geeigneten Koeffizienten versehen. Die Ergebnisse sind folgende:

$$\phi_p = \binom{m}{0} x^m - \binom{m}{4} x^{m-4} y^4 + 2\binom{m}{6} x^{m-6} y^6 - 3\binom{m}{8} x^{m-8} y^8 + \cdots \,, \tag{4.6}$$

$$\phi_q = \binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{5} x^{m-5} y^5 + 2\binom{m}{7} x^{m-7} y^7 - 3\binom{m}{9} x^{m-9} y^9 + \cdots \,, \tag{4.7}$$

$$\phi_r = \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 - 2\binom{m}{4} x^{m-4} y^4 + 3\binom{m}{6} x^{m-6} y^6 - 4\binom{m}{8} x^{m-8} y^8 + \cdots \,, \tag{4.8}$$

$$\phi_s = \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 - 2\binom{m}{5} x^{m-5} y^5 + 3\binom{m}{7} x^{m-7} y^7 - 4\binom{m}{9} x^{m-9} y^9 + \cdots \tag{4.9}$$

Einige Bemerkungen: Ein Glied mit $x^{m-2}y^2$ fehlt in (4.6). Ein Glied mit $x^{m-3}y^3$ fehlt in (4.7). Sonst ist der Exponent von x um 2 abnehmend und der Exponent von y um 2 zunehmend. Außerdem sind die Binominalkoeffizienten durchgehend mit natürlichen Zahlen multipliziert, ausgenommen ist das erste Glied in (4.6) und (4.7).

Hier sind vier Beispiele:

$$\phi_p = x^7 - 35x^3y^4 + 14xy^6 \,, \tag{4.10}$$
$$\phi_q = 7x^6y - 21x^2y^5 + 2y^7 \,, \tag{4.11}$$
$$\phi_r = 21x^5y^2 - 70x^3y^4 + 21xy^6 \,, \tag{4.12}$$
$$\phi_s = 35x^4y^3 - 42x^2y^5 + 3y^7 \,. \tag{4.13}$$

Da (4.1) eine lineare Differentialgleichung ist, gilt das Superpositionsprinzip. Damit kann man neue biharmonische Funktionen aus den elementaren Funktionen (4.6), (4.7), (4.8) und (4.9) bilden. Auf einmal haben wir unendlich viele biharmonische Funktionen vor unseren Augen.

5 Integral-Iterationsverfahren und die Lösungen der biharmonischen Poisson-Gleichung

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir den Fall, wenn die biharmonische Gleichung Rechtsseite hat:

$$\phi_{xxxx} + 2\phi_{xxyy} + \phi_{yyyy} = \rho \; . \tag{5.1}$$

Wir haben (5.1) „biharmonische Poisson-Gleichung“ genannt.

Die Beschreibung des Integral-Iterationsverfahrens verläuft wie in Abschnitt 3, nur ist der Integrand jetzt

$$H = \phi_{xxxx} + 2\phi_{xxyy} + \phi_{yyyy} - \rho \tag{5.2}$$

und wir integrieren viermal nach y :

$$\phi_2 = \phi_1 - \iiiint H_1 \, dy \, dy \, dy \, dy \tag{5.3}$$

und

$$\phi_3 = \phi_2 - \iiiint H_2 \, dy \, dy \, dy \, dy \; . \tag{5.4}$$

Weil wir nur eine partikuläre Lösung für ρ suchen, setzen wir $\phi_1 = 0$ ein und erhalten

$$\phi_2 = \iiiint \rho \, dy \, dy \, dy \, dy \; . \tag{5.5}$$

Für $\rho = x^m y^n$ hat die Lösung folgende Gestalt:

$$\phi = b_0 x^m y^{n+4} + b_2 x^{m-2} y^{n+6} + b_4 x^{m-4} y^{n+8} + \cdots \; . \tag{5.6}$$

Wir setzen (5.6) in die Gleichung (5.1) ein, bestimmen die Koeffizienten b_0, b_2, b_4 ... und erhalten

$$\begin{aligned} \phi_a = \frac{1}{(n+4,4)} \Bigg[& x^m y^{n+4} - \frac{2(m,2)}{(n+6,2)} x^{m-2} y^{n+6} + \\ & + \frac{3(m,4)}{(n+8,4)} x^{m-4} y^{n+8} - \frac{4(m,6)}{(n+10,6)} x^{m-6} y^{n+10} + \cdots \Bigg] \; . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Wenn wir $\phi_1 = 0$ einsetzen und ρ viermal nach x integrieren,

$$\phi_2 = \iiiint \rho \, dx \, dx \, dx \, dx \tag{5.8}$$

und

$$\phi_3 = \phi_2 - \iiiint H_2 \, dx \, dx \, dx \, dx \ , \tag{5.9}$$

dann erhalten wir folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \phi_b = \frac{1}{(m+4,4)} \Bigg[& x^{m+4} y^n - \frac{2(n,2)}{(m+6,2)} x^{m+6} y^{n-2} + \\ & + \frac{3(n,4)}{(m+8,4)} x^{m+8} y^{n-4} - \frac{4(n,6)}{(m+10,6)} x^{m+10} y^{n-6} + \cdots \Bigg] \ . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Hier ist ein Beispiel für $\rho = x^3 y$: Aus (5.7) ergibt sich

$$\phi_a = \frac{1}{120} \left(x^3 y^5 - \frac{2}{7} x y^7 \right) \ . \tag{5.11}$$

Aber (5.10) liefert uns

$$\phi_b = \frac{1}{840} x^7 y \ . \tag{5.12}$$

Die Differenz $\phi_a - \phi_b$ ist eine biharmonische Funktion. Gleichung (5.7) liefert uns auch richtige Ergebnisse, wenn n eine Bruchzahl ist:

$$\rho = x^2 y^{\frac{1}{2}} \ : \qquad \phi_a = \frac{1}{\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} \left[x^2 y^{\frac{9}{2}} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2}} y^{\frac{13}{2}} \right] \tag{5.13}$$

$$\rho = x^2 y^{-\frac{1}{2}} \ : \qquad \phi_a = \frac{1}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \left[x^2 y^{\frac{7}{2}} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2}} y^{\frac{11}{2}} \right] \tag{5.14}$$

Bevor wir den Fall betrachten, wo der Exponent von y in $\rho = x^m y^n$ eine negative ganze Zahl ist, wollen wir zuerst eine Lösung für $\rho = x^m \ln y$ angeben:

$$\phi_c = x^m S^4 - 2(m,2) x^{m-2} S^6 + 3(m,4) x^{m-4} S^8 - 4(m,6) x^{m-6} S^{10} + \cdots \ . \tag{5.15}$$

Den Großbuchstaben mit Exponent S^n haben wir in (3.20) eingeführt. Für $\rho = x^3 \ln y$ lautet die Lösung

$$\phi_c = \frac{1}{24} x^3 y^4 \left(\ln y - \frac{25}{12} \right) - \frac{1}{60} x y^6 \left(\ln y - \frac{147}{60} \right) \ . \tag{5.16}$$

Wir haben (5.16) vollständig angegeben, um sie mit der Lösung (3.23) der normalen Poisson-Gleichung besser vergleichen zu können.

Die Darstellung der Lösung für $\rho = x^m y^{-n}$ ist sehr umständlich.

- Bei ungeradem n sind drei Fälle zu unterscheiden:

  Für $n = 1$:

$$\phi_d = x^m S^3 - 2(m,2)x^{m-2}S^5 + 3(m,4)x^{m-4}S^7 - \cdots \tag{5.17}$$

  Für $n = 3$:

$$\phi_e = \frac{1}{2!}\left[x^m S^1 - 2(m,2)x^{m-2}S^3 + 3(m,4)x^{m-4}S^5 - \cdots\right] . \tag{5.18}$$

  Für $n \geq 5$:

$$\begin{aligned}\phi_f = &\sum_{k=0}^{\frac{n-5}{2}}(-1)^k(k+1)\frac{(m,2k)}{(n-1,2k+4)}x^{m-2k}y^{-n+2k+4} + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}}{(n-1)!}\sum_{k=0}(-1)^k\left(\frac{n-1}{2}+k\right)(m,n+2k-3)x^{m-n-2k+3}S^{2k+1} .\end{aligned} \tag{5.19}$$

- Bei geradem n werden ebenfalls drei Fälle getrennt dargestellt:

  Für $n = 2$:

$$\phi_g = -\left[x^m S^2 - 2(m,2)x^{m-2}S^4 + 3(m,4)x^{m-4}S^6 - \cdots\right] . \tag{5.20}$$

  Für $n = 4$:

$$\phi_h = -\frac{1}{3!}\left[x^m S^0 - 2(m,2)x^{m-2}S^2 + 3(m,4)x^{m-4}S^4 - \cdots\right] . \tag{5.21}$$

  Für $n \geq 6$:

$$\begin{aligned}\phi_i = &\sum_{k=0}^{\frac{n-6}{2}}(-1)^k(k+1)\frac{(m,2k)}{(n-1,2k+4)}x^{m-2k}y^{-n+2k+4} + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{n-6}{2}}}{(n-1)!}\sum_{k=0}(-1)^k\left(\frac{n-2}{2}+k\right)(m,n+2k-4)x^{m-n-2k+4}S^{2k} .\end{aligned} \tag{5.22}$$

Wir haben drei Beispiele ausgewählt:

Für $\rho = x^5 y^{-9}$:

$$\phi_f = \frac{1}{(8,4)} x^5 y^{-5} - \frac{2(5,2)}{(8,6)} x^3 y^{-3} + \frac{3(5,4)}{(8,8)} x y^{-1} \tag{5.23}$$

Für $\rho = x^6 y^{-7}$:

$$\phi_f = \frac{1}{(6,4)} x^6 y^{-3} - \frac{2(6,2)}{(6,6)} x^4 y^{-1} + \frac{1}{6!} \left[3(6,4) x^2 S^1 - 4(6,6) S^3 \right] \tag{5.24}$$

Für $\rho = x^6 y^{-8}$:

$$\phi_i = \frac{1}{(7,4)} x^6 y^{-4} - \frac{2(6,2)}{(7,6)} x^4 y^{-2} - \frac{1}{7!} \left[3(6,4) x^2 S^0 - 4(6,6) S^2 \right] \tag{5.25}$$

6 Zusammenfassung

Ein Integral-Iterationsverfahren ist ursprünglich entwickelt worden, um exakte Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für die transsonische Strömung herzuleiten. In diesem Artikel wenden wir dieses Verfahren auch auf die linearen partiellen Differentialgleichungen an. Für die Laplace-Gleichung, die Poisson-Gleichung, die biharmonische Gleichung sowie die biharmonische Poisson-Gleichung werden dadurch viele *exakte* Lösungen herausgefunden, die in dieser Art in der Mathematik noch nicht vorgekommen sind.

7 Aussicht

In der absehbaren Zukunft wollen wir über die allgemeinen Lösungen der Euler-Gleichung

$$\phi_x(\Delta\phi)_y - \phi_y(\Delta\phi)_x = 0$$

aus der Strömungstheorie berichten. Außerdem erklären wir später auch, wie man eine Lösung für die mehrdimensionale Laplace-Gleichung

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} + \cdots = 0$$

finden kann.

Literatur

[1] Kuang-lai Chao
Analytische Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die transsonische Strömung in physikalischen Räumen
DFVLR - FB 86-14
Translation: Analytical solutions of the nonlinear partial differential equations for transonic flow in physical spaces
European Space Agency, Technical Translation
ESA-TT-1009, December 1986

[2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik; Band VII, Elastizitätstheorie
Akademie Verlag, Berlin 1991

[3] Frederick S. Woods
Advanced Calculus
Ginn and Company, Boston 1926