Herleitung der Bessel-Funktionen mit dem Integral-Iterationsverfahren

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao

Göttingen, den 23. Februar 2009

Abstract

Derivation of Bessel functions with the integral iterative method

An integral iterative method for the Bessel equation will be introduced in order to derive Bessel functions in a very simple way.

Übersicht

Für die Bessel-Gleichung wird ein Integral-Iterationsverfahren vorgestellt, um die Bessel-Funktionen auf einfachste Weise herzuleiten.

Internet

Dieser Artikel ist online abrufbar unter:
http://www.satzansatz.de/math/bessel.pdf

Anschrift des Verfassers

Dr. rer. nat. Kuang-lai Chao
Auf der Lehmbünde 23
37085 Göttingen
Germany
E-Mail: info@satzansatz.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Jahr 1986 hatte ich ein Integral-Iterationsverfahren erstmalig vorgestellt, um exakte Lösungen für die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die transsonische Strömung sowohl im kartesischen als auch im Zylinder-Koordinatensystem herzuleiten [1]. Durch Anwendung dieses Integral-Iterationsverfahrens im Jahr 2007 wurden viele exakte Lösungen für die folgenden linearen partiellen Differentialgleichungen gefunden: Laplace-Gleichung, Poisson-Gleichung, biharmonische Gleichung sowie biharmonische Poisson-Gleichung [2].

In diesem Artikel wird dieses Verfahren auf die lineare gewöhnliche Differentialgleichung erweitert. Im Abschnitt 2 formulieren wir das Integral-Iterationsverfahren für die Bessel-Gleichung. Im Abschnitt 3 zeigen wir ausführlich die Herleitung der Bessel-Funktion zweiter Gattung. Die Bessel-Funktion für $n = 0$ zeigen wir im Abschnitt 4 .

Die Auffindung der Bessel-Funktionen ist dadurch zu einer ganz elementaren und sehr leichten Aufgabe geworden.

Für die Verbesserung der Texte und für die mühevolle Anfertigung und Veröffentlichung dieser Arbeit möchte ich meinem jüngsten Sohn, Ingo Chao, herzlich danken.

2 Integral-Iterationsverfahren für die Bessel-Gleichung

Die Bessel-Gleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{2.1}$$

ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung [3, 5]. Dabei ist n eine reelle Konstante, positiv oder negativ, ganzzahlig oder nicht ganzzahlig. Eine andere Darstellung der Bessel-Gleichung ist

$$\frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx}\left[x^{2n+1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}y\right)\right] + x^2 y = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Man bestätigt dies durch Differenzieren:

$$\frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx}\left[x^{2n+1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}y\right)\right] = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2 y \quad . \tag{2.3}$$

Der Operator auf die Funktion y ,

$$F(y) = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx}\left[x^{2n+1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}y\right)\right] \quad , \tag{2.4}$$

hat eine Inverse

$$y = x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} F(y)\, dx\, dx \quad . \tag{2.5}$$

Sie ist entstanden nach der Regel der inversen Bildungen: Dividieren durch Multiplizieren, Differenzieren durch Integrieren und umgekehrt, und zwar nach der Reihenfolge von links nach rechts.

Wir führen eine neue Bezeichnung ein:

$$B = x^2 y'' + xy' - n^2 y + x^2 y \quad . \tag{2.6}$$

B ist nichts anderes als der Bessel-Ausdruck aus (2.1) mit $y' = \frac{dy}{dx}$ und $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Unser Iterationsverfahren beginnt mit dem ersten Lösungsansatz $y = y_0$. Dabei ist $y_0 = x^n$ oder $y_0 = x^{-n}$.

Wir berechnen

$$B_0 = x^2 y_0'' + x y_0' - n^2 y_0 + x^2 y_0 \tag{2.7}$$

und erhalten

$$y_1 = y_0 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} B_0 \, dx \, dx \quad . \tag{2.8}$$

Wir berechnen weiter

$$B_1 = x^2 y_1'' + x y_1' - n^2 y_1 + x^2 y_1 \tag{2.9}$$

und leiten y_2 her:

$$y_2 = y_1 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} B_1 \, dx \, dx \quad . \tag{2.10}$$

Wir rechnen so weiter und erhalten nach dem k-ten Schritt y_k . Mit y_k berechnen wir B_k :

$$B_k = x^2 y_k'' + x y_k' - n^2 y_k + x^2 y_k \quad . \tag{2.11}$$

Wir haben viele Beispiele getestet bei vorgegebenem n und stellen fest, dass B_k gleich x^2 mal das letzte Glied von y_k ist. Man braucht y_k' und y_k'' sowie (2.11) nicht auszurechnen. Wir zeigen dies noch im nächsten Abschnitt.

Mit y_k und B_k berechnen wir y_{k+1} :

$$y_{k+1} = y_k - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} B_k \, dx \, dx \tag{2.12}$$

usw.

3 Bessel-Funktion zweiter Gattung

Wir betrachten zunächst den Fall für $y_0 = x^{-n}$ mit einer positiven ganzen Zahl n :

$$B_0 = x^2 y_0'' + x y_0' - n^2 y_0 + x^2 y_0 = x^{-n+2} \quad . \tag{3.1}$$

Mit y_0 und B_0 berechnen wir y_1 nach (2.8):

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} \cdot x^{-n+2} \, dx \, dx \\
&= y_0 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x \, dx \, dx \\
&= y_0 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\
&= y_0 - \frac{x^n}{2} \int x^{-2n+1} \, dx \\
&= x^{-n} - \frac{x^n}{2} \cdot \frac{x^{-2n+2}}{(-2n+2)} \\
&= x^{-n} + \frac{x^{-n+2}}{2(2n-2)} \quad .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir berechnen weiter B_1 mit y_1 nach (2.9):

$$B_1 = \frac{x^{-n+4}}{2(2n-2)} \quad . \tag{3.3}$$

B_1 ist gleich x^2 mal das letzte Glied von y_1 . Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} \cdot \frac{x^{-n+4}}{2(2n-2)} \, dx \, dx \\
&= x^{-n} + \frac{x^{-n+2}}{2(2n-2)} + \frac{x^{-n+4}}{2(2n-2) \cdot 4(2n-4)} \quad .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Um die Formel zu vereinfachen, führen wir neue Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
& b_0 = 1 \quad , \quad b_1 = \frac{1}{2(2n-2)} \quad , \quad b_2 = \frac{1}{2(2n-2) \cdot 4(2n-4)} \quad , \\
& b_3 = \frac{1}{2(2n-2) \cdot 4(2n-4) \cdot 6(2n-6)} \quad , \cdots , \\
& b_k = \frac{1}{2(2n-2) \cdot 4(2n-4) \cdots 2k(2n-2k)} \quad , \cdots , \\
& b_{n-1} = \frac{1}{\left[2^{n-1}(n-1)!\right]^2} \quad .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

In (3.4) steht y_2 . Wir rechnen weiter bis auf $k = n-1$:

$$y_{n-1} = b_0 x^{-n} + b_1 x^{-n+2} + b_2 x^{-n+4} + \cdots + b_{n-1} x^{n-2} \quad . \tag{3.6}$$

Wie wir gesagt haben, B_{n-1} ist gleich x^2 mal das letzte Glied von y_{n-1} :

$$B_{n-1} = b_{n-1} x^n \quad . \tag{3.7}$$

Danach entsteht bei jedem weiteren Schritt die Logarithmusfunktion $\ln x$. Mit y_{n-1} und B_{n-1} berechnen wir y_n ausführlich:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1} \cdot b_{n-1} x^n \, dx \, dx \\ &= y_{n-1} - b_{n-1} x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{2n-1} \, dx \, dx \\ &= y_{n-1} - b_{n-1} x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n}}{2n} \, dx \\ &= y_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{2n} x^n \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= y_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{2n} x^n \ln x \\ &= y_{n-1} - c x^n \ln x \quad . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei haben wir eine neue Bezeichnung eingeführt:

$$c = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)! \; 2^n \; n!} \quad . \tag{3.9}$$

Mit y_n berechnen wir B_n :

$$B_n = -c x^{n+2} \ln x \quad . \tag{3.10}$$

Ausführlich berechnen wir weiter y_{n+1} mit der Formel:

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} \quad , \quad m \neq -1 \quad . \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n - x^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{n-1}\left[-cx^{n+2}\ln x\right] dx\, dx \\
&= y_n + cx^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \int x^{2n+1} \ln x\, dx\, dx \\
&= y_n + cx^n \int \frac{1}{x^{2n+1}} \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\ln x - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)^2}\right] dx \\
&= y_n + \frac{cx^n}{2n+2} \int \left[x \ln x - \frac{x}{2n+2}\right] dx \\
&= y_n + \frac{cx^n}{2n+2} \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{2(2n+2)}\right] \\
&= y_{n-1} - cx^n \ln x + \frac{cx^{n+2}}{2(2n+2)} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right] \quad . \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Das letzte Glied aus (3.12) mal x^2 liefert uns

$$
B_{n+1} = \frac{cx^{n+4}}{2(2n+2)} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right] \quad . \qquad (3.13)
$$

Mit y_{n+1} und B_{n+1} erhalten wir y_{n+2} :

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} = y_{n-1} - cx^n \ln x &+ \frac{cx^{n+2}}{2(2n+2)} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right] \\
&- \frac{cx^{n+4}}{2(2n+2)\cdot 4(2n+4)} \left[\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+4}\right] \quad . \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Weitere Schritte zeigen, dass die Lösung eine unendliche Reihe ist. Ein Teil der Konstante c ist $\frac{1}{2^n n!}$. Wir erkennen sofort, dass der Ausdruck vor $\ln x$ die Bessel-Funktion erster Gattung ist:

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \left[x^n - \frac{x^{n+2}}{2(2n+2)} + \frac{x^{n+4}}{2(2n+2)\cdot 4(2n+4)} - \cdots\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad . \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren die ganze Reihe mit $-2^{n-1}(n-1)!$ und erhalten nach einigen Umformungen die Bessel-Funktion zweiter Gattung:

$$
\begin{aligned}
Y_n(x) = J_n(x) \ln x &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n+m}\right) \quad . \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Wir möchten darauf hinweisen, dass k von 1 (nicht von 0) bis ∞ bei der zweiten Summation ist, weil x^n nur mit $\ln x$ zusammen erscheint. Es gibt kein alleinstehendes x^n . Unsere $Y_n(x)$ enthält $J_n(x)$ nicht.

Es ist interessant zu beobachten, wie die Konstante $\frac{1}{2^n n!}$ Schritt für Schritt entstanden ist.

4 Bessel-Funktion für $n = 0$

Unser Integral-Iterationsverfahren liefert uns auch die richtigen Ergebnisse der Bessel-Funktionen erster Gattung. Bei $y_0 = x^n$ für ganzzahliges n und für positiv und negativ nicht ganzzahliges n ist die Herleitung der Bessel-Funktionen sehr einfach. Wir möchten dies nicht mehr zeigen. Stattdessen betrachten wir nur den Fall für $n = 0$. Mit $y_0 = x^0 = 1$ erhalten wir

$$B_0 = x^2 y_0'' + x y_0' + x^2 y_0 = x^2 \quad . \tag{4.1}$$

Mit y_0 und B_0 berechnen wir y_1 nach (2.8):

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \int \frac{1}{x} \int x^{-1} \cdot x^2 \, dx \, dx \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2} \quad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Weiter ist B_1 gleich x^2 mal das letzte Glied von y_1 :

$$B_1 = -\frac{x^4}{2^2} \quad . \tag{4.3}$$

Danach bekommen wir y_2 :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 - \int \frac{1}{x} \int x^{-1} \left(-\frac{x^4}{2^2} \right) dx \, dx \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wir machen einen Schritt weiter:

$$y_3 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \quad , \tag{4.5}$$

und erhalten schließlich

$$J_0(x) = y_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad . \tag{4.6}$$

Mit der Methode der Reihenentwicklung hat man nur die Bessel-Funktion erster Gattung hergeleitet. Die zweite Lösung muss anderweitig gefunden werden. Eine solche Aufgabe gestaltet sich sehr kompliziert [3, 4]. Unser Integral-Iterationsverfahren liefert uns beide Lösungen mit einer erstaunlichen Einfachheit. Mit dieser Feststellung beenden wir diese Arbeit.

5 Zusammenfassung

Nachdem viele exakte Lösungen für die partiellen Differentialgleichungen mit dem Integral-Iterationsverfahren gefunden wurden, haben wir dieses Verfahren auf die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erweitert. In diesem Artikel wird ein Iterationsverfahren für die Bessel-Gleichung eingeführt. Damit haben wir die alten bekannten Bessel-Funktionen, insbesondere die Bessel-Funktion zweiter Gattung, in einer ganz einfachen Weise hergeleitet.

Literatur

[1] Kuang-lai Chao
Analytische Lösungen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für die transsonische Strömung in physikalischen Räumen
DFVLR - FB 86-14
Translation: Analytical solutions of the nonlinear partial differential equations for transonic flow in physical spaces
ESA-TT-1009, December 1986

[2] Kuang-lai Chao
Integral-Iterationsverfahren und die exakten Lösungen der partiellen Differentialgleichungen
Internet, 2007
http://www.satzansatz.de/math/integraliteration.pdf

[3] Frederick S. Woods
Advanced Calculus
Ginn and Company, Boston 1926

[4] E. L. Ince
Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen
Bibliographisches Institut, Mannheim
Hochschultaschenbücher-Verlag, Band 67, 1956

[5] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (Editor)
Handbook of Mathematical Functions
Dover Publications, New York 1964